QUADRATURA CIRCULI

Ad amussim exacta invictis argumentis brevissimè demonstrata.

1. THEOREMA I. *Antecedentes rationum tam excessivarum, quàm defectivarum inservientium determinandis excessibus & defectibus peripheriarum falsarum diametri* 1. *debent esse divisibiles per* 8.

Demonstratio. Per rationes excessivas 4 : 13, 5 : 16, 6 : 19, 7 : 22, ut demonstratum fuit §.§. 3. 4. 9. *Methodi infallibilis*, inveniuntur peripheriarum falsarum diametri 8 excessus $\frac{4}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{1}{7}$ & per defectivas 1:3, 9:28, 10:31, 20:61 reperiuntur defectus $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{2}{10}$ & $\frac{12}{20}$, quorum omnium denominatores sunt itaque ipsi antecedentes rationum falsarum. Jam cum excessus & defectus crescant & decrescant in ratione diametrorum; debent excessus & defectus peripheriarum falsarum diametri 1 esse octies minores, nempe: excessus $\frac{4}{32}$ $\frac{3}{40}$ $\frac{2}{48}$ $\frac{1}{56}$; & defectus $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{72}$ $\frac{2}{80}$ & $\frac{12}{160}$, quorum omnium denominatores sunt antecedentes rationum priorum multiplicati per 8: multiplicando igitur etiam earundem consequentes per 8, prodeunt 4 paria rationum prioribus æqualium, quarum antecedentes sunt divisibiles per 8, & quarum quodlibet par constat ex una excessiva & altera defectiva, nempe: 32:104 & 8: 24; 40: 128 & 72: 224; 48 : 152 & 80: 248; 56 : 176 & 160: 488. Jam cum per hæc 4 paria rationum, ut patebit ex problemate sequente, excessus & defectus peripheriarum falsarum diametri 1 prodeant iidem, qui ex excessibus & defectibus periph: falsarum diametri 8 prona consequentia fuere deducti; palam est, antecedentes rationum tam excessivarum quam defectivarum inservientium determinandis excessibus & defectibus periph: falsarum diametri 1 esse debere divisibiles per 8.

2. Problema. *Per rationes excessivas & defectivas, quarum antecedentes sunt divisibiles per* 8, *determinare tam excessum, quam defectum peripheriarum falsarum diametri* 1. *Resolutio & Demonstratio.* 1. Ratio 32 : 104 = 100 : 325 est excessiva, & ratio 8 : 24 = 100 : 300 est defectiva: ergo etiam peripheria $\frac{104}{32}$ diametri 1 per priorem inventa, est excessiva, & peripheria $\frac{24}{8}$ per posteriorem reperta, defectiva. 2. Jam cum ablatâ defectivâ ex excessiva relinquatur summa excessus & defectus; hæc Subtractio autem fieri nequeat, nisi reductis priùs peripheriis falsis ad eandem denominationem; necesse est, terminos peripheriæ excessivæ multiplicare per denominatorem defectivæ,

&

& terminos defectivæ per denominatorem excessivæ. 3. Multiplicando itaque terminos excessivæ $\frac{104}{32}$ per denominatorem 8 defectivæ, prodit æquivalens $\frac{832}{256}$, in qua termini excessus prioris continentur multiplicati per 8 : ergo excessus hujus æquivalentis debet esse reducibilis per 8, h. e. termini ejus, numerator & denominator debent esse divisibiles per denominatorem 8 defectivæ, qui si actu dividantur per hunc denominatorem, debet necessariò prodire excessus quæsitus : nam diviso facto per unum factorem, prodit factor alter; sed numerator excessus æquivalentis est factum ex numeratore excessus excessivæ in denominatorem 8 defectivæ, & denominator ejusdem est factum ex denominatore excessus excessivæ in eundem denominatorem 8 : ergo divisis terminis excessus æquivalentis per denominatorem 8 defectivæ, necessariò prodire debet excessus quæsitus. 4. Multiplicando deinde terminos defectivæ $\frac{24}{8}$ per denominatorem 32 excessivæ, oritur æquivalens $\frac{768}{256}$, in qua termini defectus prioris continentur multiplicati per 32 : ergo defectus hujus æquivalentis debet esse reducibilis per 32, h. e. termini ejus debent esse divisibiles per denominatorem 32 excessivæ, qui si actu dividantur per hunc denominatorem, debet ob rationem præcedentem necessariò emergere defectus quæsitus. 5. Per illam reducibilitatem partium summæ, excessus & defectus adhuc incogniti illico proferuntur in apricum : nam quoniam ablatâ periph: defectivâ æquivalente $\frac{768}{256}$ ex excessiva æquivalente $\frac{832}{256}$, relinquitur earundem summa excessus & defectus $\frac{64}{256}$, atque ex n. 3. & 4. constat, excessum esse debere reducibilem per denominatorem 8 defectivæ; defectum autem per denominatorem 32 excessivæ, & nullæ aliæ partes summæ per hos denominatores sunt reducibiles, nisi $\frac{32}{256}$ & $\frac{32}{256}$; manifestum est, alteram harum partium esse excessum, alteram defectum. Reducendo itaque unam harum partium per 8, h. e. dividendo tam ejus numeratorem 32, quàm denominatorem 256 per denominatorem 8 defectivæ, debet necessariò prodire excessus quæsitus $\frac{4}{32}$, & reducendo alteram per denominatorem 32 excessivæ, debet necessariò emergere defectus quæsitus $\frac{1}{8}$. Quoniam igitur peripheria exc: $\frac{104}{32}$ est conflata ex vera & excessu $\frac{4}{32}$; palam est, ablato hoc ab illa, relinqui peripheriam veram $\frac{100}{32} = \frac{25}{8}$, & quia defectiva $\frac{24}{8}$ deficit à vera una 8va parte; evidens est, addita hac ad illam, prodire quoque veram $\frac{25}{8}$; ex quo apparet, cardinem rei verti in determinando legitimo excessu & defectu. Jam cum nullum ex 5 argumentis hujus demonstrationis vocari queat in dubium, & eodem ratiocinandi modo, qui à nemine sana mente prædito improbari potest, etiam, ut patebit ex §. 6to, per reliqua 3. paria rationum in §. 1mo. adductarum iidem eruantur excessus & defectus, qui ibidem fuerunt determinati; evidens est, excessus & defectus peripheriarum falsarum diametri 1 legitimè posse determinari per omnes rationes, qua-

rum

rum antecedentes sunt divisibiles per 8, dummodo excessivæ non sint majores, quàm $1 : 3\frac{1}{4}$, & defectivæ non minores quàm $1 : 3$.

3. *Corollarium I.* Quoniam igitur diameter est ad peripheriam veram, ut $1 : \frac{104}{32} - \frac{4}{32} = 32 : 100 = 8 : 25$. & ut $1 : \frac{24}{8} + \frac{1}{8} = 8 : 25$, palam est, ablatis excessibus ex consequentibus rationum excessivarum; vel additis defectibus ad consequentes defectivarum, semper prodire rationem veram: ergo $40 : 128 - \frac{3}{40} = 40 : 125 = 8 : 25$ & $72 : 224 + \frac{1}{72} = 72 : 225 = 8 : 25$; $48 : 152 - \frac{2}{48} = 48 : 150 = 8 : 25$ & $80 : 248 + \frac{2}{80} = 80 : 250 = 8 : 25$; $56 : 176 - \frac{1}{56} = 56 : 175 = 8 : 25$ & $160 : 488 + \frac{12}{160} = 160 : 500 = 8 : 25$. Per rationes $16 : 51$ & $24 : 74$ reperitur excessus $\frac{1}{16}$ & defectus $\frac{1}{24}$: ergo $16 : 51 - \frac{1}{16} = 16 : 50 = 8 : 25$ & $24 : 74 + \frac{1}{24} = 24 : 75 = 8 : 25$; per rationes $24 : 77$ & $32 : 97$ emergit excessus $\frac{2}{24}$, & defectus $\frac{3}{32}$: ergo $24 : 77 - \frac{2}{24} = 24 : 75 = 8 : 25$ & $32 : 97 + \frac{3}{32} = 32 : 100 = 8 : 25$ &c. Jam si differentiæ seu summæ partes (excessus & defectus) essent illegitimæ, prodirent diversæ rationes, aliæ aliis majores, aliæ aliis minores; sed quoniam per partes ope problematis præcedentis determinatas *semper & absque ulla exceptione* eruitur eadem ratio $= 8 : 25$, quod est argumentum maximè convincens; evidens est, partes omnes esse legitimè determinatas, consequenter rationem $8 : 25$. per eas erutam, esse unicam veram. *Vid:* §. 6.

4. *Corollarium II.* Data itaque diametro, reperitur peripheria ad amussim exacta inferendo: ut diameter 8 ad peripheriam 25, ita diameter data ad peripheriam quæsitam; qua ducta deinde in 4tam partem diametri, Circulus illico perfectè quadratur: nam quoniam factores, nempe peripheria inventa, & quarta pars diametri, sunt legitimè determinati; necesse est, ut etiam factum seu area Circuli prodeat perfecta. Et quoniam ex *Methodo brevissima & demonstrativa describendi quadratum æquale Circulo &c.* luculenter patet, facili negotio posse construi quadratum æquale semicirculo, vel Circulo dato, & vice versa describi semicirculum vel Circulum æqualem quadrato dato; dubitari nequit, quin quadratura Circuli ad amussim exacta jam sit inventa & invictè demonstrata, quæ cum unicè dependeat à ratione vera diametri ad peripheriam, ut $8 : 25$; à re non alienum fore existimo, ad tollendum omne dubium, adhuc sequens adjicere

5. Theorema II. *Ratio 8 : 25 nequit esse defectiva.*

Demonstratio Peripheria excessiva diametri 1 per rationem $40, 128 = 1 : 3\frac{1}{5}$ inventa, est $\frac{128}{40}$, & peripheria per $8 : 25$ reperta, est $\frac{25}{8}$: quibus reductis ad eandem denominationem, prodeunt æquivalentes $\frac{3024}{320}$ & $\frac{1000}{320}$, quarum posterior dempta ex priore, relinquit differentiam $\frac{24}{320}$. Jam si ratio $8 : 25$ foret defectiva; esset etiam peripheria posterior per eam inventa, defectiva: consequenter differentia esset conflata ex excessu & defectu, quia ablatâ periph: defectivâ ex excessiva, relinquitur

præter

præter exceſſum adhuc defectus; ſed differentia $\frac{24}{320}$ eſt ſolus exceſſus: ergo peripheria poſterior nequit eſſe defectiva. Propoſitio major eſt certa; minor autem ita demonſtratur: quoniam ob reductionem peripheriarum ad candem denominationem, termini exceſſus in exceſſiva latentes, in ejus æquivalente continentur multiplicati per denominatorem 8; debet hujus æquivalentis exceſſus eſſe reducibilis per eundem denominatorem 8, & quia termini peripheriæ $\frac{25}{8}$ fuerunt multiplicati per denominatorem 40 exceſſivæ; deberent etiam termini defectus, ſi darentur, in ejus æquivalente contineri multiplicati per eundem denominatorem 40: hinc defectus hujus æquivalentis eſſet reducibilis per 40: conſequenter differentia conſtaret ex una parte reducibili per 8, & altera per 40; ſed non datur hic pars differentiæ reducibilis per 40: ergo non datur etiam defectus: ergo differentia $\frac{24}{320}$ reducibilis per 8, eſt ſolus exceſſus. Ergo &c.

6. Scholion. *Summæ exc: & defect: partes reducibiles per denominatores peripheriarum falsarum reperiuntur hoc modo: E numeratore Summæ auferatur denominator major peripheriarum falsarum tamdiu, donec relinquatur residuum exactè divisibile per denominatorem minorem, & huic residuo invento subscribatur denominator Summæ, ita innotescit pars ejus 1ma, quæ dempta ex Summa ipsa, prodit partem 2dam; reducta deinde parte reducibili per denominatorem defectivæ, emergit excessus quæsitus; reducta autem parte reducibili per denominatorem excessivæ, prodit defectus quæsitus. E gr. ablatâ peripheriâ defectivâ $\frac{224}{72}$ ex excessiva $\frac{128}{40}$ relinquitur Summa $\frac{256}{2880}$, è cujus numeratore denominator major 72 subductus ter, relinquit residuum 40 exactè divisibile per denominatorem minorem 40: subscribendo ergo huic residuo denominatorem Summæ, innotescit pars $\frac{40}{2880}$ reducibilis per denominatorem 40 excessivæ, quæ ablata è Summa ipsa manifestat partem $\frac{215}{2880}$ reducibilem per denominatorem 72 defectivæ: ergo excessus quæsitus est $\frac{3}{40}$ & defectus $\frac{1}{72}$ Porro periph: defectiva $\frac{248}{80}$ ablata ex excessiva $\frac{152}{48}$ sistit Summam exc: & defect: $\frac{256}{3840}$, è cujus numeratore denominator major 80 demptus bis, relinquit residuum 96 divisibile per denominatorem 48 excessivæ: ergo prima pars est $\frac{96}{3840}$, & secunda $\frac{160}{3840}$, quæ reducta per denominatorem 80 defectivæ, dat excessum $\frac{2}{48}$; prima autem reducta per denominatorem 48 excessivæ dat defectum $\frac{2}{80}$. Tandem periph: defectiva $\frac{488}{160}$ subducta ex excessiva $\frac{176}{56}$, relinquit Summam $\frac{832}{8960}$, è cujus numeratore denominator major 160 ablatus prodit residuum 672 divisibile per denominatorem 56 excessivæ: ergo pars 1ma est $\frac{672}{8960}$, & 2da $\frac{160}{8960}$, quæ reducta per denominatorem 160 defectivæ, dat excessum $\frac{1}{56}$; 1ma autem reducta per denominatorem 56 excessivæ, dat defectum $\frac{12}{160}$.*